Δευτέρα 15/04/2019

Παράδειγμα

$n \times n$ πραγματικοί πίνακες με $\det A \neq 0$

$$GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^*$$

$\varphi(A) = \det A$

$\varphi(A \cdot B) = \det(AB) = \det A \cdot \det B = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$.

$\ker\varphi = SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1\}$.

→ Είναι οι ομάδες S_3 και $\mathbb{Z}_6$ ισόμορφες;

S_3: Δεν είναι αβελιανή.
$(1,2)(2,3) = (1,2,3)$
$(2,3)(1,2) = (1,3,2)$

$\mathbb{Z}_6$: κυκλική $\mathbb{Z}_6 = \langle [1]_6 \rangle$.

Άρα S_3 και $\mathbb{Z}_6$ δεν είναι ισόμορφες.

→ Είναι οι ομάδες D_5 και $\mathbb{Z}_7$ ισόμορφες;

$$D_5 = \left\{ \begin{matrix} 1, & a, & a^2, & a^3, & a^4 \\ b, & ba, & ba^2, & ba^3, & ba^4 \end{matrix} \right\}$$

$ba = a^4 b$, $ba^2 = a^3 b$, $ba^3 = a^2 b$, $ba^4 = ab$

Άρα δεν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ τους.

→ Είναι οι ομάδες D_5 και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$ ισόμορφες;

D_5: δεν είναι αβελιανή

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$: αβελιανή ομάδα αφού είναι οι επιμέρους αβελιανές.

Άρα δεν είναι ισόμορφες.

→ Είναι οι ομάδες $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Z}$ ισόμορφες;

$\mathbb{Q}$: δεν είναι κυκλική. η $\mathbb{Z}$ είναι κυκλική.

Άρα δεν είναι ισόμορφες.

→ Είναι οι ομάδες $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Q}$ ισόμορφες;

$|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{Q}|$

$\mathbb{R}$: μη αριθμήσιμο, $\mathbb{Q}$: αριθμήσιμο

Άρα δεν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Q}$. Συνεπώς δεν είναι ισόμορφες.

Πρόταση: Έστω $G=\langle a\rangle$ κυκλική ομάδα τάξης n. Τότε $G\cong\mathbb{Z}_n$.

Απόδειξη:

$$G=\langle a\rangle=\{1,a,a^2,\dots,a^{n-1}\}$$

$$\mathbb{Z}_n\to G=\langle a\rangle$$
$$\varphi([k]_n)=a^k$$

1) $[k]_n=[\lambda]_n$, $k\equiv\lambda \bmod n\Rightarrow k=\lambda+qn$
$\varphi([\lambda]_n)=a^\lambda=a^{k-qn}=a^k(a^n)^{-q}=a^k1^{-q}=a^k=\varphi([k]_n)$ Άρα φ: καλά ορισμένη

2) $\varphi([k]_n+[\lambda]_n)=\varphi([k+\lambda]_n)=a^{k+\lambda}=a^ka^\lambda=\varphi([k]_n)\cdot\varphi([\lambda]_n)$ φ: ομομορφισμός

3) $[k]_n\in Ker\varphi\Rightarrow\varphi([k]_n)=1\Rightarrow a^k=1\Rightarrow \overset{n}{\overset{\shortparallel}{o(a)}}\,|\,k\Rightarrow n\,|\,k\Rightarrow k=n\cdot q\Rightarrow$
$[k]_n=[n\cdot q]_n=[0]_n\Rightarrow Ker\varphi=\{[0]_n\}\Rightarrow\varphi$: "1-1"

4) Έστω $b\in G=\langle a\rangle\Rightarrow b=a^s$ για κάποιο $s\in\mathbb{Z}$
$\varphi([s]_n)=a^s=b$ Άρα φ: επί

Συνεπώς φ: ισομορφισμός.

Ορισμός: Έστω $H\leq G$. Η H ονομάζεται κανονική αν $gH=Hg$ για κάθε $g\in G$. και συμβολίζεται $H\trianglelefteq G$.

Παραδείγματα $G\trianglelefteq G$ ⊛ Δείκτης είναι το πλήθος των σύμπλοκων
$gG=G=Gg$. Έχει δείκτη 1

$\{e\}\trianglelefteq G$ ουδέτερο
$g\{e\}=\{ge\}=\{g\}=\{eg\}=\{e\}g$

Πρόταση Έστω $H \triangleleft G$ $\qquad G/H = \{gH \mid g \in G\}$

$$g_1H \cdot g_2H = g_1 \cdot g_2 H$$

Η πράξη είναι καλά ορισμένη.

Έστω $g_1H = g_1'H$ και $g_2H = g_2'H$.

$g_1' = g_1'e \in g_1'H = g_1H$, $e \in H$ $\qquad g_1' = g_1h_1$, $h_1 \in H$

$g_2' = g_2'e \in g_2'H = g_2H$ $\qquad g_2' = g_2h_2$, $h_2 \in H$

$$g_1'H\, g_2'H = g_1'g_2'H = g_1h_1g_2h_2H = g_1h_1g_2H \overset{*}{=} g_1g_2h_3H = g_1g_2H$$

$$(*)\begin{cases} h_1g_2 \in Hg_2 = g_2H \\ h_1g_2 = g_2h_3 \end{cases}$$

→ Είναι οι ομάδες $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ και $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ ισόμορφες;

αβελιανή αβελιανή

$|\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2| = 8 = |\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2|$

Η $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ έχει ένα στοιχείο τάξης 1 το $([0]_2,[0]_2,[0]_2)$ και όλα τα υπόλοιπα έχουν τάξη 2.
Ενώ το στοιχείο $([1]_4,[0]_2)$ της $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ έχει τάξη $o([1]_4,[0]_2) =$
$=$ Ε.Κ.Π$(4,1) = 4$.

Άρα οι $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ και $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2$ δεν είναι ισόμορφες

Είναι οι ομάδες $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ και $\mathbb{Z}_6$ ισόμορφες;

αβελιανή κυκλική αβελιανή κυκλική.

$\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$

$\boxed{\begin{array}{l} a \to \varphi(a) \\ a^n \to \varphi(a^n) = (\varphi(a))^n \end{array}}$

$\varphi([1]_6) = ([1]_2,[1]_3)$

$\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$

$\varphi([1]_6) = ([1]_2,[1]_3)$

$\varphi([a]_6) = ([a]_2,[a]_3)$

Έστω $[a]_6 = [b]_6 \to a \equiv b \bmod 6 \Rightarrow a-b = 6k \Rightarrow b = a-6k$.

$\varphi([a]_6) = ([a]_2,[a]_3)$

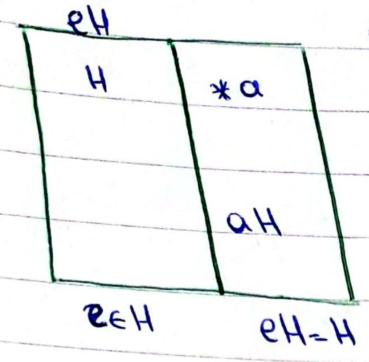
$\varphi([b]_6) = ([b]_2,[b]_3) = ([a-\underbrace{6k}_{0\bmod 2}]_2,[a-\underbrace{6k}_{0\bmod 3}]_3) = ([a]_2,[a]_3)$.

Άρα η φ είναι καλά ορισμένη.

$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \varphi \text{ καλά ορισμένη} \\ 2)\ \varphi \text{ ομομορφισμός} \\ 3)\ \varphi\ 1\text{-}1 \\ 4)\ \varphi \text{ επί} \end{array}}$

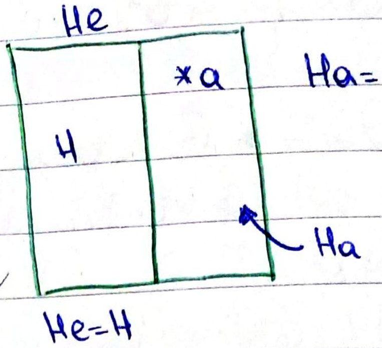
2) $\varphi([a]_6+[b]_6) = \varphi([a+b]_6) = ([a+b]_2,[a+b]_3) = ([a]_2+[b]_2,[a]_3+[b]_3)$
$= ([a]_2,[a]_3) + ([b]_2,[b]_3) = \varphi([a]_6) + \varphi([b]_6)$

Έστω $H \leq G$ με $\underset{}{\overset{\text{δείκτης}}{[G:H]}} = 2$ τότε $H \trianglelefteq G$.



$a \notin H$

$aH = G - H$



$Ha = G - H$

Άρα $aH = Ha$

Έστω $g \in G$

1η περίπτωση: $g \in H$: $gH = H = Hg$

2η περίπτωση: $g \notin H \Rightarrow g \in G - H = aH = Ha \Rightarrow g = ah_1$, $g = h_2 a$

$$\left.\begin{aligned} gH &= ah_1H = aH \\ Hg &= Hh_2a = Ha \end{aligned}\right\} \text{Άρα } gH = Hg. \text{ Συνεπώς } H \trianglelefteq G$$

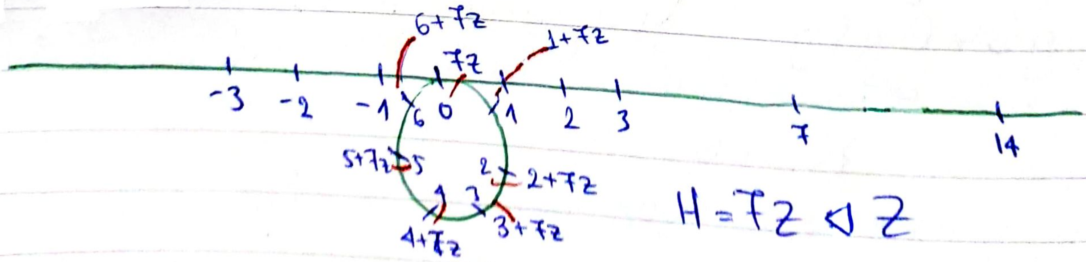
Θεώρημα

Έστω G αβελιανή ομάδα και $H \leq G$ τότε $H \trianglelefteq G$.

Απόδειξη:

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \underset{\text{αβελιανή}}{\overset{G}{=}} \{hg \mid h \in H\} = Hg. \text{ Άρα } H \trianglelefteq G$$

$n = 7$.



$H = 7\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_7 = \{0+7\mathbb{Z}, 1+7\mathbb{Z}, 2+7\mathbb{Z}, 3+7\mathbb{Z}, 4+7\mathbb{Z}, 5+7\mathbb{Z}, 6+7\mathbb{Z}\}$.

3) Έστω $[a]_6 \in Ker\varphi$.

$\varphi([a]_6) = ([0]_2, [0]_3) \Rightarrow ([a]_2, [a]_3) = ([0]_2, [0]_3) \Rightarrow [a]_2 = [0]_2$ και
$[a]_3 = [0]_3 \Rightarrow a \equiv 0 \bmod 2,\ a \equiv 0 \bmod 3 \Rightarrow 2|a,\ 3|a$, μ.κ.δ$(2,3) = 1$, $2 \cdot 3 | a$
$6|a \Rightarrow a \equiv 0 \bmod 6 \Rightarrow [a]_6 = [0]_6 \Rightarrow Ker\varphi = \{[0]_6\} \Rightarrow \varphi: 1\text{-}1$

4) $\varphi(\mathbb{Z}_6) = \{\varphi([a]_6) \mid [a]_6 \in \mathbb{Z}_6\} = \{([a]_2, [a]_3) \mid [a]_6 \in \mathbb{Z}_6\}$
$= \{([0],[0]), ([1],[1]), ([2],[2]), ([3],[3]), ([4],[4]), ([5],[5])\}$
$= \{([0],[0]), ([1],[1]), ([0],[2]), ([1],[0]), ([0],[1]), ([1],[2])\} =$
$= \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. $\quad \varphi$: επί

Άσκηση: Δείξτε ότι η $\varphi: \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ με τύπο
$\varphi([x]_{mn}) = ([x]_m, [x]_n)$ είναι ισομορφισμός όπου μ.κ.δ$(m,n) = 1$.

Πρέπει ν.δ.ό:
1) φ καλά ορισμένη
2) φ: ομομορφισμός
3) φ: "1-1"
4) φ: επί

$\varphi: \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$
$\varphi([x]_{mn}) = ([x]_m, [x]_n)$.

Έστω $([a]_m, [b]_n) \in \mathbb{Z}_{m \times n}$
Βρείτε $\varphi([x]_{mn}) = ([a]_m, [b]_n)$
$([x]_m, [x]_n) = ([a]_m, [b]_n)$.
$[x]_m = [a]_m$ και $[x]_n = [b]_n$

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv a \bmod m \\ x \equiv b \bmod n \\ (m,n) = 1 \end{array}\right\} \text{κινέζικο θεώρημα } x = \text{ Να βρεθεί}$$

Πρόταση: Έστω $G = \langle a \rangle$ κυκλική ομάδα μη πεπερασμένης τάξης. Τότε $G \cong \mathbb{Z}$

Απόδειξη

όλα διαφορετικά

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G = \langle a \rangle = \{\ldots, a^{-4}, \ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, 1, a, a^2, a^3, \ldots, a^4, \ldots\}$$

$\varphi(n) = a^n$

1) $\varphi(n+m) = a^{n+m} = a^n \cdot a^m = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$. Άρα φ ομομορφισμός
2) Έστω $n \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(n) = 1 = a^0 \Rightarrow n = 0$. Άρα φ: 1-1 $Ker\varphi = \{0\}$
3) Έστω $b \in G = \langle a \rangle \Rightarrow b = a^n$. Άρα $\varphi(n) = a^n = b$. Άρα φ: επί.

Συνεπώς από (1),(2),(3) η φ ισομορφισμός.